केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

अनुप्रस्थ आंकड़ों (एक ही समयावधि से सम्बंधित) का विश्लेषण करते समय आवृत्ति वितरण द्वारा उसे सरल एवं बोधगम्य बनाया जाता है। लेकिन किसी साधारण व्यक्ति द्वारा इन संमक वितरण द्वारा कोई निष्कर्ष निकालना कठिन होता है। यदि समंको या उनके आवृत्ति वितरण को और संक्षिप्त कर किसी एक ही अंक/आंकड़े द्वारा दिखाया जा सके तो इस अंक/आंकड़े की सहायता से पूरे समंक या उसकी विशेषता को समझना आसान हो जायेगा। अर्थात यह जो एक अंक/आंकड़ा प्राप्त होगा पूरे समंक की विशेषता को इंगित करेगा। जैसे जनप्रतिनिधि जनता का प्रतिनिधित्व करते हैं। चूंकि आंकड़ें के समूह में सभी व्यक्तिगत मानों के आधार पर निर्णय नहीं लिया जा सकता अतः आंकड़ों के प्रतिनिधि मान के आधार पर निर्णय लिया जाता है। ये प्रतिनिधि मान आंकड़ों के मध्य में होते हैं और अन्य मानों का संकेन्द्रण इसी अंक के आस-पास होता है। आंकड़ों के इस संकेन्द्रण की विशेषता को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहा जाता है। इस संकेन्द्रण के केन्द्र में कौन सा अंक या आंकड़ा होगा इसके मापन को केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति का मान वही होगा जिसके आस-पास अधिकतर मान होते हैं। सभी आंकड़ों की प्रवृत्ति केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान की ओर होती है इसलिए इस केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान को केन्द्रीय मान भी कहा जाता है। यह केन्द्रीय मान समूह के औसत को व्यक्त करता है। दो संमक समूहों की तुलना इस केन्द्रीय मान से की जा सकती है। इस केन्द्रीय मान को ज्ञात करने की बहुतायत प्रयोग की जाने वाली तीन विधियां हैं—

1. अंकगणितीय माध्य या समान्तर माध्य या माध्य (Mean)
2. माध्यिका या मध्यांक (Median)
3. बहुलक या बहुलांक या भूयिष्ठक (Mode)

इसके अतिरिक्त 4. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) 5. और गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) भी केन्द्रीय मान ज्ञात करने की विधियां हैं।

अंकगणितीय माध्य या समान्तर माध्य या माध्य या मध्यमान (Mean)

मध्यमान वह अंक या प्राप्तांक होता है जो समस्त समंकों को जोड़कर समंकों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। जैसे- किसी कक्षा में पांच छात्रायें हैं जिनकी लम्बाई 5, 4, 4.5, 5.5 और 6 फुट है तो इसका मध्यमान $5+4+4.5+5.5+6 = 25$ में कुल छात्राओं की संख्या 5 से भाग देने पर $\frac{25}{5} = 5$ फुट प्राप्त होगा।

$$\boxed{\text{मध्यमान (Mean)} \quad M = \frac{\Sigma x}{N}}$$

(समेशन) Σ को योग के लिए प्रयोग किया जाता है।
x = प्राप्तांक
N = प्राप्तांकों की संख्या

यदि आंकड़ों या प्राप्तांकों की पुनरावृत्ति हो जैसे दस छात्रों के प्राप्तांक 20, 24, 20, 28, 28, 24, 30, 38, 28, 30 हो तो मध्यमान

प्राप्तांक	आवृत्ति	fx
20	2	40
24	2	48
28	3	84
30	2	60
38	1	38
	$N=10$	$\Sigma fx = 270$

$$M = \frac{270}{10} = 27$$

$$\boxed{\text{मध्यमान} \quad M = \frac{\Sigma fx}{N}}$$

x = प्राप्तांक
f = प्राप्तांक की आवृत्ति
N = छात्रों की संख्या

यदि आवृत्ति वितरण सतत या अविच्छिन्न हो तो वर्गान्तरों का मध्यमान का प्रयोग होता है जैसे-

प्राप्तांक	f आवृत्ति	x मध्यमान	fx
10–20	2	$15 = \frac{10+20}{2}$	30
20–30	5	$25 = \frac{20+30}{2}$	125
30–40	2	$35 = \frac{30+40}{2}$	70
40–50	1	$45 = \frac{40+50}{2}$	45
	$N=10$		$\Sigma fx = 260$

$$\text{मध्यमान } M = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{260}{10} = 26$$

समान्तर माध्य ज्ञात करने की दो विधियां हैं– प्रत्यक्ष विधि (Direct) और संक्षिप्त या अप्रत्यक्ष विधि। ~~अभी~~ जो उदाहरण हमलोगों ने किया वह प्रत्यक्ष विधि या दीर्घ विधि से मध्यमान ज्ञात करने का था। इसमें हम कुल मूल्य जोड़कर उसमें मूल्यों की कुल संख्या से भाग दे दिया जाता है। यह प्रत्यक्ष या दीर्घ विधि आकड़ों की संख्या कम होने पर सही है लेकिन समंकों में आंकड़े बहुत अधिक हों या दशमलव में हो तो यह विधि कठिन हो जाती है ऐसे में संक्षिप्त विधि का प्रयोग किया जाता है जिसमें एक कल्पित माध्य मान लिया जाता है। इसे कल्पित माध्य विधि या अप्रत्यक्ष विधि भी कहा जाता है। इसे उदाहरण के द्वारा समझते हैं—

समंकों की व्यक्तिगत श्रेणी या साधारण श्रेणी होने पर– समंकों की व्यक्तिगत श्रेणी से तात्पर्य प्रत्येक इकाई का मान या प्राप्तांक स्पष्ट रहता है। जैसे- A, B, C, D, E, F, G, H, I, J दस मजदूर हो और उनकी मासिक आय क्रमशः 80, 75, 15, 70, 100, 25, 45, 150, 50, 90 हो तो यह सरल/साधारण या व्यक्तिगत श्रेणी होगी। ~~अभी~~ यदि इस उदाहरण का माध्य निकालना हो तो प्रत्यक्ष विधि में सभी मासिक आय को जोड़कर श्रमिकों की संख्या से भाग दे देंगे।

प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{80+75+15+70+100+25+45+150+50+90}{10}$$

$$= \frac{700}{10} = 70$$

संक्षिप्त या अप्रत्यक्ष विधि

$$\boxed{\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N}}$$

जहाँ A = कल्पित माध्य

dx = कल्पित माध्य और प्राप्तांक का अन्तर

$x - A = dx$

श्रमिक	मजदूरी/मासिक आय x	कल्पित माध्य से विचलन (dx)
A	80	80-80 = 0
B	75	75-80 = -5
C	15	15-80 = -65
D	70	70-80 = -10
E	100	100-80 = 20
F	25	25-80 = 55
G	45	45-80 = -35
H	150	150-80 = 70
I	50	50-80 = -30
J	90	90-8 = 10
N=10	$\Sigma x = 700$	$\Sigma dx = -100$

संक्षिप्त विधि से–

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

हमने 80 को कल्पित माध्य माना है अतः $A = 80$

$$\bar{x} = 80 + \frac{-100}{10}$$

$$= 80 + (-10)$$

$$= 80 - 10 = 70$$

समान्तर माध्य $\bar{x} = 70$

समंकों की असतत/विच्छिन्न श्रेणी होने पर — समंकों की असतत/विच्छिन्न श्रेणी में मान या प्राप्तांक की आवृत्ति होती है यह किसकी है यह व्यक्तिगत श्रेणी की तरह स्पष्ट नहीं होता है जैसे रु.45 मजदूरी पर 100 श्रमिक काम करते हैं रु.40 मजदूरी पर 110 श्रमिक, रु.50 पर 80 श्रमिक, रु.55 पर 20 श्रमिक रु.35 पर 150 श्रमिक। यहां कौन श्रमिक है यह पता नहीं केवल उनकी संख्या है इस प्रकार की श्रेणी असतत/विच्छिन्न श्रेणी होती है। इस तरह की श्रेणी को खण्डित श्रेणी भी कहा जाता है। इस तरह की श्रेणी का समान्तर माध्य निकालने की दो विधि होगी - प्रत्यक्ष या दीर्घ विधि और अप्रत्यक्ष या संक्षिप्त विधि। अब इस उदाहरण को करते हैं—

मजदूरी x	श्रमिकों की संख्या f	fx	$A=45$ $dx=(x-A)$	fdx
35	150	5250	35-45=-10	-1500
40	110	4400	40-45=-5	-550
45	100	4500	45-45=0	0
50	80	4000	50-45=5	400
55	20	1100	55-45=10	200
	$N=460$	$\Sigma fx=19250$		$\Sigma fdx=-1450$

यदि प्रत्यक्ष विधि से किया जाय तो

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{19250}{460}$$

$$= 41.847$$
$$= 41.85$$

यदि संक्षिप्त विधि या कल्पित माध्य विधि

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$$
$$= 45 + \frac{-1450}{460}$$
$$= 45 + (-3.152)$$
$$= 45 - 3.152$$
$$= 41.848$$
$$= 41.85$$

समंकों के सतत/अविच्छिन्न या अखण्डित होने पर — इसमें आंकड़े या समंक के वर्गान्तराल के लिए आवृत्ति दी हुई होती है। आवृत्तियों का वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं होता है। इसलिए इन श्रेणियों में मान लिया जाता है कि दी हुई आवृत्तियां अपने वर्ग-अन्तराल के मध्य बिन्दु पर केन्द्रित होती हैं। मध्य बिन्दु से तात्पर्य वर्ग अन्तराल की सीमाओं का औसत।

एक उदाहरण के द्वारा सतत श्रेणी वितरण का समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं — निम्नलिखित समंक का माध्य ज्ञात करो।

वर्ग	0–4	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
आवृत्ति f	3	4	7	10	11	18	16	5	4	2

हल —

वर्ग	मध्य बिन्दु x	आवृत्ति	fx	$A = 22$, $dx = x - A$	fdx	dx/i dx'	fdx'
0–4	2	3	6	−20	−60	−4	−12
5–9	7	4	28	−15	−60	−3	−12
10–14	12	7	84	−10	−70	−2	−14
15–19	17	10	170	−5	−50	−1	−10
20–24	22	11	242	0	0	0	0
25–29	27	18	486	5	90	1	18
30–34	32	16	512	10	160	2	32
35–39	37	5	185	15	75	3	15
40–44	42	4	168	20	80	4	16
45–49	47	2	94	25	50	5	10
		$N = 80$	$\Sigma fx = 1975$		$\Sigma fdx = 215$		$\Sigma fdx' = 43$

दीर्घ विधि/प्रत्यक्ष विधि

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$

$\bar{x} = \frac{1975}{80}$

$= 24.69$

स्टेप

1. वर्गान्तर का मध्य निकालते हैं
2. आवृत्ति को मध्य से गुणा करते हैं
3. fx का कुल जोड़ Σfx निकालते हैं।
4. Σfx को कुल आवृत्ति या कुल संख्या से भाग देकर माध्य प्राप्त हो जाता है।

लघु विधि/कल्पित माध्य विधि

माध्य $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$

$= 22 + \frac{215}{80}$

$= 22 + 2.687$

$= 24.69$

स्टेप

1. वर्गान्तर का मध्य प्राप्त करते हैं।
2. कोई कल्पित माध्य मान लेते हैं।
3. कल्पित माध्य को वर्गान्तर के मध्यमान से घटा कर dx ज्ञात करते हैं।
4. dx को उसके आवृत्ति से गुणा कर fdx प्राप्त करते हैं
5. Σfdx प्राप्त कर कुल f या N से भाग देकर + A माध्य प्राप्त कर लेते हैं।

यदि dx विचलन से प्राप्त मान में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो —

$$\boxed{\text{माध्य } \bar{x} = A + i\frac{\Sigma fdx'}{N}}$$

जहाँ i = उभयनिष्ठ गुणनखण्ड या वर्गान्तर

$dx' = \frac{dx}{i}$ है या $\frac{x - A}{i}$

$\bar{x} = 22 + 5 \times \frac{43}{80}$

$= 22 + 5 \times .53$

$= 22 + 2.687$

$= 24.69$

स्टेप

1. वर्गान्तर का माध्य प्राप्त करते हैं
2. कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं। (dx)
3. यह विचलन किसी गुणनखण्ड से विभाजित हो जाता है उसे कर dx' ज्ञात कर लेते हैं।
4. फिर आवृत्ति से गुणा कर fdx' तथा $\Sigma fdx'$ ज्ञात करते हैं
5. फिर कुल आवृत्ति से भाग कर i से गुणा कर प्रतिफल को कल्पित माध्य में जोड़ माध्य प्राप्त कर लेते हैं