केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

(A) मध्यमान

मध्यमान वह प्राप्तांक है जो समस्त प्राप्तांकों के योग को प्राप्तांकों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

जैसे 5, 8, 7, 14, 16

इन प्राप्तांकों का कुल योग $= 5+8+7+14+16$

$= 50$

प्राप्तांकों की कुल संख्या $= 5$

अतः मध्यमान $= \frac{50}{5} = 10$

इसी प्रतीक $\bar{x}$ से, जिसे x दंड (x बार) पढा जाता है।

$$\bar{X} = \frac{\text{सभी प्राप्तांकों (प्रेक्षणों या अंकों) का योग}}{\text{प्राप्तांकों, प्रेक्षणों या अंकों की कुल संख्या}}$$

माना हमारे पास पाँच प्रेक्षण जिसे x_1, x_2, x_3, x_4 व x_5 से प्रदर्शित करते है तो

$$\text{मध्यमान} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

उदाहरण-1 गेहूँ के चार थैलो का भार (किग्रा में) 103, 105, 102 व 104 है। माध्य भार ज्ञात कीजिए।

माध्य भार $(\bar{x}) = \frac{103+105+102+104}{4}$ किग्रा

$= \frac{414}{4} = 103.5$ किग्रा

अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य :-

२० विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात करो।

12, 10, 5, 8, 15, 5, 2, 8, 10, 5

10, 12, 12, 2, 5, 2, 8, 10, 5, 10

यदि अंकों या प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ की बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, f_4 \cdots f_n$ हों, तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण x_1, f_1 बार आता है; प्रेक्षण x_2, f_2 बार आता है, इत्यादि।

अब, सभी प्रेक्षणों के मानों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 \cdots f_nx_n$

तथा प्रेक्षणों की संख्या का योग $f_1+f_2+ \cdots + f_n$

$$\text{तब } \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

संक्षिप्त रूप में $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

आकड़ों की बारंबारता सारणी :-

सारणी - 1

अंक (x)	2	5	8	10	12	15	योग
बारंबारता	4	5	3	5	2	1	20

सारणी -3

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या f_i	$f_i \times x_i$
2	4	$2\times4 = 8$
5	5	$5\times5 = 25$
8	3	$8\times3 = 24$
10	5	$10\times5 = 50$
12	2	$2\times12 = 20$
15	1	$1\times15 = 15$

$\Sigma f_i = 20$ $\Sigma f_i x_i = 146$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{146}{20} = 7\cdot3$$

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

सारणी - 4

प्रतिदिन मजदूरी (₹) में (वर्गअन्तराल)	कर्मचारियों की संख्या बारंबारता
150 - 160	5
160 - 170	8
170 - 180	15
180 - 190	10
190 - 200	2

सारणी से हमें पता चलता है कि 5 कर्मचारी प्रतिदिन ₹150 से ₹ 160 (160 शामिल नहीं) के बीच मजदूरी पाते है।

अब प्रत्येक वर्ग अन्तराल के लिए, हमें एक ऐसे बिन्दु (मान की आवश्यकता होती है, जो पूरे वर्गअन्तराल का प्रतिनिधित्व करे।

वर्गअन्तराल का मध्य बिन्दु उसकी उपरि (उच्च सीमा और निचली सीमाओं का औसत निकालकर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$\text{वर्ग चिन्ह} = \frac{\text{वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा + निम्न सीमा}}{2}$$

सारणी - 5

दैनिक मजदूरी (₹) में	वर्ग चिन्ह x_i	कर्मचारियों की संख्या f_i	$f_i \times x_i$
150—160	5	155	775
160—170	8	165	1320
170—180	15	175	2625
180—190	10	185	1850
190—200	2	195	390

$\Sigma f_i = 40$ $\Sigma f_i \times x_i = 6960$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{6960}{40}$$

$$= 174$$

दैनिक माध्य मजदूरी = ₹ 174

वर्गीकृत आकड़ों का माध्य ज्ञात करने की यह प्रत्यक्ष विधि है

हम वर्गीकृत आकड़ों का माध्य कल्पित माध्य विधि से भी ज्ञात कर सकते है।
इसके लिए चरण-1 में वर्गअन्तराल से प्राप्त किए गये वर्ग चिन्हो में से किसी एक वर्गचिन्ह को कल्पित माध्य के रूप में चुन लेते है। कल्पित माध्य को प्रतीक 'a' से प्रदर्शित करते है। हम 'a' को ऐसा लेते है जो वर्ग चिन्हों के ठीक मध्य का हो पर यह जरूरी नहीं 'a' को वर्गचिन्हों में से किसी भी एक वर्गचिन्ह को ले सकते है।
अगले चरण में 'a' (कल्पित माध्य) और प्रत्येक वर्गचिन्ह के बीच का अन्तर d ज्ञात किया जाता है। इसको विचलन कहा जाता है तथा इसे d से प्रदर्शित किया जाता है। इस पूरी प्रक्रिया को निम्नलिखित सारणी से समझते है।

सारणी - 6

दैनिक मजदूरी	कर्मचारियों की संख्या f_i	वर्ग चिन्ह x_i	विचलन $d_i = x_i - 175$	$f_i d_i$
150-160	5	155	155-175 = -20	-100
160-170	8	165	165-175 = -10	-80
170-180	15	175 = a	175-175 = 0	0
180-190	10	185	185-175 = +10	100
190-200	2	195	195-175 = +20	40
	$\Sigma f_i = 40$ (N)			$\Sigma f_i d_i = -40$

$$\text{माध्य} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{N(\Sigma f_i)}$$

(सूत्र, कल्पित माध्य विधि से मध्यमान निकालने के लिए)

$$= 175 + \frac{(-40)}{40}$$

$$= 175 - 1 = 174$$

दैनिक मजदूरी का माध्य = 174

उदाहरण : निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य (i) प्रत्यक्ष विधि (ii) कल्पित माध्य विधि से ज्ञात कीजिए:

सारणी -7

वर्ग अन्तराल	बारंबारता
20 – 40	9
40 – 60	11
60 – 80	14
80 – 100	6
100 – 120	8
120 – 140	15
140 – 160	12
योग	72

(i) प्रत्यक्ष विधि

सूत्र → माध्य $= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

सारणी – 8

वर्ग	बारंबारता(f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
20-40	9	$\frac{20+40}{2}=\frac{60}{2}=30$	$9\times30=270$
40-60	11	$\frac{40+60}{2}=\frac{100}{2}=50$	$11\times50=550$
60-80	14	$\frac{60+80}{2}=\frac{140}{2}=70$	$14\times70=980$
80-100	6	$\frac{80+100}{2}=\frac{180}{2}=90$	$6\times90=540$
100-120	8	$\frac{100+120}{2}=\frac{220}{2}=110$	$8\times110=880$
120-140	15	$\frac{120+140}{2}=\frac{260}{2}=130$	$15\times130=1950$
140-160	12	$\frac{140+160}{2}=\frac{300}{2}=150$	$12\times150=1800$
	$\Sigma f_i=75$		$\Sigma f_i\times x_i=6970$

इसलिए माध्य $= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{6970}{75} = 92.93$

(ii) कल्पित माध्य विधि: सारणी – 9

माना कल्पित माध्य $= a = 90$

वर्ग	बारंबारता f_i	वर्गचिन्ह x_i	विचलन $d_i = x_i - 90$	$f_i d_i$
20-40	9	30	$30-90=-60$	$9\times(-60)=-540$
40-60	11	50	$50-90=-40$	$11\times(-40)=-440$
60-80	14	70	$70-90=-20$	$14\times(-20)=-280$
80-100	6	$90=a$	$90-90=0$	$6\times0=0$
100-120	8	110	$110-90=+20$	$8\times20=160$
120-140	15	130	$130-90=+40$	$15\times40=600$
140-160	12	150	$150-90=+60$	$12\times60=720$
	$N=\Sigma f_i=75$			$\Sigma f_i d_i=220$

$$\text{माध्य} = a + \frac{1}{N}\Sigma f_i d_i$$

$$= 90 + \frac{220}{75} = 92.93$$

दोनो विधियों से माध्य समान ही निकलता है।
नोट - कल्पित माध्य सभी वर्ग चिन्हों से कोई भी वर्ग चिन्ह मान सकते है। परम्परा के अनुसार ठीक मध्य के मान को कल्पित माध्य माना जाता है इससे गणना करना आसान हो जाता है।

(B) माध्यक (माध्यिका)

यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति का वह मान है जो आँकड़ों के प्रेक्षणों के माध्य मान को बताता है।

यथाप्राप्त आँकड़ो का माध्यक निम्नलिखित तरीके से ज्ञात कर सकते हैं:

(i) आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लगाते हैं।
(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम हो, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ प्रेक्षण माध्यक होता है।
(iii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम है, तो माध्यक $\frac{n}{2}$ वे तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे प्रेक्षणों का माध्य होता है।

उदाहरण :- 15 कुत्तों का वजन (किग्रा में) इस प्रकार है:

9, 26, 10, 22, 36, 13, 20, 20, 10, 21, 25, 16, 12, 14, 19

आँकड़ों को आरोही क्रम में लगाने पर :

9, 10, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 20, 21, 22, 25, 26, 36

माध्यक

यहाँ प्रेक्षणों की संख्या = 15 (विषम)

इसलिए $\frac{n+1}{2}$ वाँ प्रेक्षण अर्थात् $\frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$ वाँ प्राप्तांक

जो 19 किग्रा है।

उदाहरण -1: एक चर के मान 78, 56, 22, 34, 45, 54, 39, 68, 54, 84 हैं। इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए।

आरोही क्रम में लिखने पर :

22, 34, 39, 45, 54, 54, 56, 68, 78, 84

यहाँ $n = 10$ (समसंख्या)

इसलिए माध्यिका $\frac{n}{2}$ वाँ प्रेक्षण व $(\frac{n}{2}+1)$ वाँ प्रेक्षण का औसत माध्य होगा।

$$\text{माध्यक} = \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ प्रेक्षण} + (\frac{n}{2}+1)\text{ वाँ प्रेक्षण (पद)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{10}{2}\text{ वाँ पद} + (\frac{10}{2}+1)\text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{5\text{ वाँ पद} + 6\text{ वाँ पद}}{2} = \frac{54+54}{2}$$

$$= 54$$

वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका

वर्ग अन्तराल आँकड़ों के लिए माध्यिका की गणना निम्नानुसार की जाती है-

1) दिए हुए वितरण से संचयी बारंबारता ज्ञात करते है।
2) उस वर्ग को ज्ञात करते है जिसमें बारंबारताओं के योग $N/2$ स्थित हो। इस वर्ग को माध्यिका वर्ग कहते हैं।
3) तत्पश्चात् निम्नलिखित सूत्र से माध्यिका ज्ञात कर लेते है -

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{(N/2 - F)}{f} \times h$$

l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

F = माध्यिका वर्ग से पहले की संचयी बारंबारता,

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता,

h = माध्यिका वर्ग का अन्तराल

सारणी -1

	प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या f	संचयी बारंबारता (cf)	
	0-10	5	→ 5	
	10-20	3	5+3 = 8	यहाँ
	20-30	4	8+4 = 12	$N = \Sigma f_i$
	30-40	3	12+3 = 15	= 53
	40-50	3	15+3 = 18	
	50-60	4	18+4 = 22 = F	
माध्यिका वर्ग →	$\boxed{60-70}$	7 = f	22+7 = 29 = cf जो	$\frac{N}{2} = 26.5$ के निकट है।
	70-80	9	29+9 = 38	
	80-90	7	38+7 = 45	
	90-100	8	45+8 = 53	

$N = 53$, $\frac{N}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$

CF = 21 जो 26.5 के अन्यन्त निकट है

अत: 60–70 माध्यिका वर्ग है।

सूत्र माध्यिका $= l + \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f}\right) h$

l, माध्यिका वर्ग 60–70 की निम्न सीमा = 60

$\frac{N}{2} = 26.5$

F = $\frac{N}{2}$ = 26.5 के निकट संचयी बारंबारता 21 के ठीक

पहले की संचयी बारंबारता = 22

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता = 7

h = माध्यिका वर्ग 60–70 का अन्तराल = 70 − 60 = 10

$$= 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{4.5 \times 10}{7} = 60 + \frac{45}{7} = 60 + 6.4$$

$$= 66.4$$

अत: लगभग आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए एवं अन्य आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से अधिक अंक प्राप्त किए।

उदाहरण :-2:- निम्नलिखित बारंबारता श्रेणी में किसी बसाहट के 68 बिजली उपभोक्ताओं का मासिक बिजली खर्च दिया हुआ है। माध्यिका की गणना कीजिए।

सारणी -2

मासिक बिजली खर्च	बिजली उपभोक्ताओं की संख्या f	संचयी बारंबारता C.F
65 – 85	4	→ 4
85 – 105	5	4 + 5 = 9
105 – 125	13	9 + 13 = 22 = F
$\boxed{125 - 145}$	20 = f	22 + 20 = 42 ← 34 के अत्यन्त निकट
145 – 165	14	42 + 14 = 56
165 – 185	8	56 + 8 = 64
185 – 205	4	64 + 4 = 68
	N = 68	

माध्यिका वर्ग

$$\frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

माध्यिका वर्ग = 125 – 145

$l = 125$

$F = 22, \quad f = 20, \quad h = 145 - 125 = 20$

माध्यिका =

$$l + \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f}\right) \times h$$

$$= 125 + \left(\frac{34 - 22}{20}\right) \times 20$$

$$= 125 + \frac{12}{\cancel{20}} \times \cancel{20}$$

$= 125 + 12 = 137$ इकाई

(C) बहुलक :-

एक कम्पनी विभिन्न साइज की कमीज बनाती है। कंपनी साप्ताहिक बिक्री का रिकार्ड रखती है जो नीचे दिया गया है:

सारणी -1

आकार (सेमी में)	90	95	100	105	110	115
कमीजों की संख्या	50	125	190	385	270	28

सारणी से पता चलता है कि 105 सेमी आकार की कमीजों की बिक्री ज्यादा हुई है। इसलिए कंपनी आगे चलकर इस आकार की कमीजे ज्यादा बनाएगी। यहाँ 105 कुछ और नहीं बल्कि आँकड़ों का बहुलक है। बहुलक भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक मान है।

दिए गए आँकड़ों में जो प्रेक्षण सबसे अधिक बार आता है वह आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

दूसरे शब्दों में वह प्रेक्षण जिसकी बारंबारता सबसे अधिक बार आता है वह आकड़ों का बहुलक कहलाता है।

यथाप्राप्त आँकड़ों का बहुलक

यथाप्राप्त आँकड़ों की स्थिति में, केवल आँकड़ों को देखकर आसानी से बहुलक ज्ञात किया जाता है।

किसी फुटबाल टीम द्वारा 12 मैचों में किए गये गोल इस प्रकार है:

1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4

गोलों का बहुलक क्या है ?

आँकड़ों को बढ़ते हुए क्रम में लिखने पर
6, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 15, 15, 22

हम पाते है कि 9 और 5 दोनों प्रेक्षणों की समान अधिकतम बारंबारता 2 है। इसलिए दोनों ही आँकडों का बहुलक है।

उदाहरण : निम्नलिखित आकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए
5, 10, 3, 7, 2, 9, 6, 2, 11, 2

आकड़ों को बढ़ते हुए क्रम में रखने पर
2, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11

हम देखते है कि 2, 3 बार अर्थात् सबसे अधिक बार आया है अतः बहुलक 2 है।

उदाहरण : एक पासे को 100 बार फेंका गया, जिसका परिणाम निम्नवत् है: सारणी-2

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	15	16	16	15	17	20

सारणी से देखते है कि अंक 6 की बारंबारता सबसे अधिक 20 है। अतः बहुलक 6 है।

वर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक

बारंबारता बंटन तालिका से बहुलक ज्ञात करने में केवल बारंबारता देखकर बहुलक का पता नहीं लगाया जा सकता, अपितु हम अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग का पता लगा सकते हैं। इस वर्ग को बहुलक वर्ग कहते हैं। वर्गीकृत आँकड़ों से बहुलक की गणना निम्नलिखित सूत्र से कर सकते हैं।

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

जहाँ l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा
h = वर्ग अन्तराल
f_0 = बहुलक वर्ग के पहले वर्ग की बारंबारता
f_2 = बहुलक वर्ग के आगे के वर्ग की बारंबारता
f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

उदाहरण: एक सर्वे में 20 परिवारों के सदस्यों की संख्या निम्न तालिका में दी गयी है।

सारणी – 3

परिवार का आकार	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवार संख्या	7	8	2	2	1

उपर्युक्त आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

अधिकतम बारंबारता = 8
इस बारंबारता का संगत वर्ग = 3-5
अतः बहुलक का वर्ग = 3-5
l = (बहुलक वर्ग की निम्न सीमा) = 3
h = (वर्ग अन्तराल) = 2
f_1 = (बहुलक वर्ग की बारंबारता) = 8
f_0 = (बहुलक वर्ग के पहले वर्ग की बारबारता) = 7
f_2 = (बहुलक वर्ग के अगले वर्ग की बारंबारता) = 2

बहुलक $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$$= 3 + \left[\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right] \times 2$$

$$= 3 + \left[\frac{1}{16-9}\right] \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7} = \frac{21+2}{7} = \frac{23}{7} = 3.286$$